TRACCE DI RISOLUZIONE

1. - Le lettere sono 9 in tutto. Se fossero distinte avremmo 9! anagrammi. Poiché vi sono 3 T, 2 R e 2 A, gli anagrammi sono $\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 15120$.
   - Se le lettere iniziali e finali sono consonanti, esse possono essere 2 T, oppure 2 R, oppure 1 T e 1 R. Tolte le 2 T, nelle 7 lettere rimangono 2 R e 2 A, perciò $\frac{7!}{2!\cdot 2!} = 1260$ possibilità. Tolte le 2 R, le lettere ripetute sono 3 T e 2 A, ossia $\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$ possibilità. Collocando, infine, una T e una R alle estremità, rimangono 2 T e 2 A tra le 7 lettere intermedie, che danno luogo a $2! \cdot \frac{7!}{2!\cdot 2!} = 2520$ anagrammi (considerando che anche la prima e l'ultima possono permutarsi). In tutto, si trovano quindi $1260 + 420 + 2520 = 4200$ diverse parole.
   - Le consonanti sono 5, quindi, se le disponiamo consecutivamente, il loro blocco può essere preceduto da 0, 1, 2, 3 oppure 4 vocali: 5 possibilità. Una volta assegnata la posizione di tale blocco, le consonanti si possono disporre in $\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ modi. Se immaginiamo adesso di eliminare tutte le consonanti, rimane un blocco di 4 vocali, tra cui 2 A, che può essere disposto in $\frac{4!}{2!} = 12$ modi. Per ogni disposizione delle vocali ed ogni scelta della posizione in cui inserire il blocco delle vocali, si può liberamente anagrammare il blocco delle consonanti, ottenendo tutte parole differenti. Nel complesso le possibilità sono pertanto $5 \cdot 10 \cdot 12 = 600$.

   Osservazioni. Tipico esercizio combinatorico. Strumenti di calcolo e casistica si miscelano in base al contesto.

2. Dopo avere scritto l'ultimo termine uguale a n, si saranno scritti in tutto $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ termini. Si tratta quindi di stabilire quale sia il minimo intero positivo n per il quale $\frac{n(n+1)}{2} \geqslant 2008$, vale a dire per $n = 63$. In 2008-esima posizione compare dunque il termine 63.

3. Prima calcoliamo la somma dei termini in $\mathcal{A}$, a cui poi aggiungiamo la somma dei termini in $\mathcal{B}$. Infine sottraiamo la somma dei termini in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, che abbiamo contato due volte. Il primo e l'ultimo termine di $\mathcal{A}$ sono 114 e 348. In $\mathcal{A}$ ci sono quindi $\frac{348-(114-6)}{6} = 40$ termini e la loro somma è dunque $\frac{(114+348)\cdot 40}{2} = 9240$. Il primo e l'ultimo termine di $\mathcal{B}$ sono 112 e 348. In $\mathcal{B}$ ci sono quindi $\frac{348-(112-4)}{4} = 60$ termini e la loro somma vale $\frac{(112+348)\cdot 60}{2} = 13800$. Infine, gli elementi presenti in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ debbono essere multipli sia di 6 che di 4, quindi sono i multipli del loro m.c.m. (ossia 12) compresi tra 110 e 350. Il primo e l'ultimo sono 120 e 348. I termini in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ sono quindi $\frac{348-(120-12)}{12} = 20$ e la loro somma vale $\frac{(120+348)\cdot 20}{2} = 4680$. In conclusione, la somma dei termini presenti in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è $9240 + 13800 - 4680 = 18360$.

   Osservazioni. In questo esercizio si fa uso del cosiddetto *principio di inclusione-esclusione*, $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y) - \#(X \cap Y)$: prendendo tutti gli elementi di X e tutti gli elementi di Y, quelli in comune vengono infatti contati due volte. Questo principio riappare in diversi contesti, quando si esegue un conteggio o una misurazione: ad esempio in geometria per le aree o i volumi, in probabilità, o anche in altre situazioni. Se consideriamo 3 o più insiemi anziché 2, la formulazione si complica e conduce a una serie di somme a segni alterni (si può provare aiutandosi per esempio con dei digrammi di Venn).

4. Rimangono da scegliere altre 4 cifre distinte, diverse dalla cifra 3. Qualunque sia la quaterna di cifre scelte, le 5 cifre si poranno poi disporre in un unico modo in maniera crescente. Abbiamo pertanto una corrispondenza biunivoca tra i possibili completamenti della cinquina crescente ed i sottoinsiemi di 4 cifre scelte tra 9 (è escluso il 3). Tali sottoinsiemi sono $\binom{9}{4} = 126$.

   Osservazioni. Un vero esempio di cosa sia l'*arte* di contare. Inseguire le singole possibilità mediante una casistica avrebbe condotto a una lunga elencazione, con alta probabilità di errore, e ci avrebbe insegnato poco o nulla sulle ragioni reali della risposta o su come estendere il proble (se le cifre note fossero state 2? se la sequenza fosse stata più lunga?). Invece l'individuaizone di una corripondenza biunivoca più generele ci fa risparmiare una grande fatica e ci permette di orientarci agevolmente anche rispetto a diverse possibili alterazioni del problema.

5. Distinguiamo due casi. Nel primo caso nessuno dei 3 fratelli fa l'arbitro. Allora l'arbitro può essere scelto in 8 modi, ciascuno dei quali condurrà ad avere una diversa coppia di squadre in campo. Per non stare insieme i 3 fratelli debbono essere due in una squadra e 1 nell'altra. Il fratello che rimane da solo si può dunque scegliere in 3 modi diversi. Per formare le due squadre, si tratta a questo punto di assegnare 4 compagni al fratello da solo, scegliendoli tra gli altri 7 giocatori: questo determina in modo univoco le squadre in campo (una con 1 e l'altra con 2 dei fratelli). Quest'ultima scelta si può fare in $\binom{7}{4} = 35$ modi. Riepilogando, abbiamo quindi $8 \cdot 3 \cdot \binom{7}{4} = 840$ possibilità di formare le squadre come indicato, assumendo che nessuno dei 3 fratelli sia l'arbitro.
   L'altro caso è quello in cui uno dei 3 fratelli fa l'arbitro. Tale scelta, determinante ai fini delle squadre in campo, si può compiere in 3 modi. In questo secondo caso, non è rilevante se gli altri due fratelli sono insieme oppure no. Per formare le due squadre si tratta adesso di scegliere un gruppo di 5 giocatori su 10 (creando una squadra si crea anche l'altra), il che può esser fatto in $\binom{10}{5} = 252$ modi. Tuttavia, cosí facendo, contiamo 2 volte ciascuna suddivisione. Immaginiamo che una delle due squadre debba indossare una maglia rossa e l'altra una maglia blu. La scelta compiuta corrisponde a decidere quali 5 giocatori indossano la maglia rossa, e quindi stiamo contando come diversi i casi in cui la maglia rossa sia indossata da 5 giocatori oppure dai 5 rimanenti. Ma in realtà, se i giocatori si scambiano tutte le maglie rosse con maglie blu e viceversa, la suddivisione in due squadre non cambia e non va contata come differente; le suddivisioni possibili lasciando uno dei 3 fratelli come arbitro sono perciò $3 \cdot \frac{\binom{10}{5}}{2} = 378$.
   In conclusione, rispettando la condizione data, ci sono $840 + 378 = 1218$ possibilità per formare le squadre.

   Osservazioni. Occorre stare attenti a non contare più volte lo stesso oggetto. E' uno degli errori più frequenti. È essenziale interpretare quali siano gli oggetti da considerare 'coincidenti' (o meglio, *equivalenti*), cosa che dipende dal contesto del problema: ad esempio le simmetrie che lo caratterizzano.

6. - A partire dal posto occupato dall'amico n.1 e muovendosi in senso orario, il primo posto può essere assegnato in 10 modi, il secondo in 9, il terzo in 8, e cos via. In tutto le possibilità sono dunque 10!, ossia 3628800.
   - Due possibilità sono quelle di scegliere tutti i piatti di uno stesso colore. Se invece sono presenti due colori diversi, osserviamo che la disposizione non può essere stabile sotto una rotazione di k posti ($1 \leqslant k \leqslant 10$): infatti, a partire da un piatto giallo dovrebbe capitare un piatto giallo dopo altri k posti, quindi dopo altri $2k$, e cosí via. Dato che 11 e k sono primi tra loro, tutti gli 11 piatti verrebbero ad essere gialli. Assurdo. Per contare quante siano le configurazioni dove sono presenti entrambi i colori, prendiamo un piatto giallo e uno verde consecutivi, cosí ordinati in senso orario. Per gli altri 9 piatti le scelte dei colori sono 2^9. Con ciò, non è possibile che la stessa configurazione sia stata contata più volte, poiché eseguendo una rotazione si ottiene una diversa disposizione. In tutto abbiamo dunque $2 + 2^9 = 514$ configurazioni. Più in generale, per un numero di posti p si hanno $2 + 2^{p-2}$ possibilit configurazioni.

   Osservazioni. Il ragionamento salta se il numero dei piatti non è primo. In tal caso, occorre depurare le configurazioni contate più volte, che saranno stabili rispetto a qualche rotazione.

7. Per visualizzare il problema, immaginiamo che ciascun giocatore, ogni sera, scambi una stretta di mano con tutti gli altri. Le strette di mano corrisponderanno quindi al numero di coppie di giocatori presenti, e saranno $\binom{4}{2} = 6$ per sera. Se indichiamo con n il numero totale di partecipanti al torneo, le strette di mano dovranno essere in tutto $\binom{n}{2}$, dato che ogni giocatore incontra ciascun altro una volta. Si ha quindi l'equazione $\binom{n}{2} = 20 \cdot \binom{4}{2}$, vale a dire $n(n-1) = 240$, la cui unica soluzione intera e positiva è $n = 16$. Non è difficile vedere che in effetti il torneo può essere organizzato con 16 giocatori in modo da rispettare la condizione indicata.

   Osservazioni. Le strette di mano sono un espediente per visualizzare quelli che qui sono in realtà gli oggetti chiave da contare. Non sempre gli oggetti più importanti sono subito evidenti: talvolta essi sono creati da relazioni tra altri oggetti presenti (in questo caso sono gli incontri tra le coppie).

8. Eseguiamo il calcolo contando quanti siano gli esiti favorevoli agli eventi considerati, in rapporto agli esiti possibili. Questi ultimi, in tutti e 3 i casi, sono 6^7, le possibili sequenze ordinate di 7 numeri, ciascuno dei quali può variare da 1 a 6 (*combinazioni con ripetizione*). Cosí facendo supponiamo di distinguere i singoli di dadi: possiamo immaginare di averli etichettatio colorati.

   - Il numero che si presenta può variare in 6 modi. Gli esiti favorevoli sono questi 6. La probabilità risulta quindi $\frac{6}{6^7} = \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}$.
   - Ci sono 7 possibili scelte per il dado che dà 6. Per ognuno degli altri dadi, ci saranno 4 possibilità. Concludendo, la probabilità risulta essere $\frac{7 \cdot 4^6}{6^7} = \frac{448}{2187}$.
   - Essendoci 6 punteggi e 7 dadi, esattamente uno dei punteggi uscirà in due dadi. C'è quindi da scegliere la coppia di dadi che darà gli stessi numeri, il che può avvenire in $\binom{7}{2}$ modi. Con il vincolo di avere gli stessi punteggi sui due dadi prescelti, i vari numeri possono adesso essere attribuiti in 6! modi ai diversi dadi (equivale infatti ad ordinare i dadi in base ai punteggi usciti, trattando come un tutt'uno la coppia con gli stessi punteggi). La probabilità richiesta è quindi: $\frac{\binom{7}{2} \cdot 6!}{6^7} = \frac{35}{648}$.

9.
   - Si tratta di contare gli anagrammi della parola *aaabdddee*. Nello sviluppo di $(a+b+c+d+e)^9$ compariranno infatti, tra gli altri, tutti i monomi ottenuti con questi anagrammi. Essi danno luogo tutti allo stesso monomio, che avrà quindi per coefficiente la quantità di tali anagrammi, vale a dire $\frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 5040$.
   - Un monomio del tipo $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\epsilon$ appartiene allo sviluppo se $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 9$. I modi di ottenere 9 come somma ordinata di 5 termini corrispondono alle combinazioni con ripetizione di 5 oggetti in gruppi di 9, ossia $\binom{9+5-1}{5-1} = 715$.
   - Si tratta di scegliere una coppia di lettere con esponente 3 (ci sono $\binom{5}{2} = 10$ possibilità), poi una lettera con esponente 2 (fra le 3 rimaste), poi una lettera con esponente 1 (fra le 2 rimaste). Nel complesso $\binom{5}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 60$ possibilità.

10. Indicando con $c, f, l, m, n \, (\geqslant 0)$ il numero di caramelle al caffé, alla fragola, al latte, alla mandorla, alla nocciola, dobbiamo scegliere tali numeri in modo da avere $c + f + l + m + n = 15$. Inoltre, dato che che $c \geqslant 3$, $l \geqslant 1$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 3$, introduciamo le variabili $c' = c - 3$, $l' = l - 1$, $m' = m - 2$, $n' = n - 3$. Risulta $c' + f + l' + m' + n' = 6$ con $c', f, l', m', n' \geqslant 0$. Le scelte possibili sono quindi le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti in gruppi di 6, ossia $\binom{10}{4} = 210$. Queste non sono però tutte ammissibili: dobbiamo scartare le composizioni nelle quali $f > 2$. Introducendo $f' = f - 2$, si ha quindi $c' + f' + l' + m' + n' = 4$ con $c', f', l', m', n' \geqslant 0$. Le composizioni da scartare sono le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti in gruppi di 4, cioè $\binom{8}{4} = 70$. In conclusione, le composizioni possibili sono $210 - 70 = 140$.

11. Sia f il numero di facce del poliedro. Per ogni faccia F, il numero dei suoi lati è pari al numero di facce confinanti con F, ed è quindi un intero positivo minore di f. Questi f interi positivi minori di f non possono essere tutti diversi (*principio dei cassetti*).

    Osservazioni. Per dimostrare che, in un insieme finito di oggetti, debbono essercene alcuni uguali quasi sempre occorre ridursi ad una situazione nella quale il principio dei cassetti sia applicabile (se il numero degli oggetti supera il numero dei cassetti, in almeno uno dei cassetti deve stare più di un oggetto). La difficoltàè nell'individuare quali possano essere gli oggetti e quali i cassetti.

12. Se un quadrato contenuto nella scacchiera ha lato pari, la sua area è multipla di 4. Dato che le caselle nere sono in tal caso la metà dell'area, esse dovranno essere in numero pari. Di conseguenza, non ci sono quadrati di lato pari con un numero dispari di caelle nere.
    Un quadrato di lato dispari contenuto nella scacchiera avrà le caselle di uno dei due colori in quantità dispari e le altre in quantità pari. Tra tali quadrati, quelli con un numero dispari di caselle nere dovranno essere tanti quanti quelli con un numero dispari di caselle bianche, per la simmetria della configurazione [scambiando i colori di tutte le caselle, il problema rimarrebbe identico]. Contiamo i quadrati di lato dispari. Un quadrato è individuato tramite un blocco di caselle consecutive nella riga in basso e un ugual blocco di caselle consecutive nella colonna di sinistra. I blocchi di k caselle in una linea di 20 sono $21 - k$. Quindi abbiamo 20^2 quadrati di lato 1, 18^2 quadrati di lato 3, 16^2 quadrati di lato 5, e cosí via fino a 2^2 quadrati di lato 20. Di conseguenza i quadrati di lato dispari sono in tutto $2^2 + 4^2 + \ldots + 20^2 = 4(1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) = 4 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 1540$, la metà dei quali (770) hanno un numero dispari di caselle nere.

13. I vertici di un poligono regolare appartengono alla circonferenza circoscritta al poligono. I tre vertici danno luogo a un triangolo rettangolo se e solo se due di essi sono diametralmente opposti. Per n dispari ciò non può accadere: la probabilità in tal caso è 0. Per n pari, calcoliamo quanti sono gli esiti favorevoli, accanto a quelli possibili. Conviene ragionare sull'*insieme* dei vertici, anziché per scelte successive. Le terne di vertici possibili sono $\binom{n}{3}$. Per avere un triangolo rettangolo, possiamo scegliere prima una coppia di vertici opposti (in $n/2$ modi), poi il rimanente vertice (in $n-2$ modi): in tutto $\frac{n(n-2)}{2}$ possibilità. In conlusione, la probabilità richiesta è $\frac{n(n-2)/2}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n-1}$.

14. Tratteremo il caso più generale, nel quale le rette sono una quantità non specificata, che indicheremo con k.

    - Non essendoci coppie di rette parallele né terne di rette concorrenti, i punti d'intersezione corrispondono in maniera biunivoca alle coppie di rette scelte tra le k rette date, quindi sono $\binom{k}{2}$. Con 60 rette abbiamo 1770 punti d'intersezione.
    - Dato che ogni retta interseca tutte le altre, su ogni retta ci sono $k - 1$ punti d'intersezione, che delimiteranno $k - 2$ segmenti e 2 semirette. Nel complesso i segmenti sono dunque $k(k-2)$ e le semirette $2k$. Nel caso $k = 60$, si hanno 3480 rette e 120 segmenti.
    - Immaginiamo di tracciare una circonferenza abbastanza grande da contenere nel proprio interno tutti i punti d'intersezione tra le rette [il che è sempre possibile trattandosi di un insieme finito di punti]. Le k rette determinano $2k$ punti d'intersezione sulla circonferenza (corrispondenti alle $2k$ semirette), e quindi $2k$ archi, che corrispondono in maniera biunivoca alle regioni illimitate. Per 60 rette le regioni illimitate sono 120.
    - Calcoliamo quante sono in tutto le regioni formate. Immaginiamo di tracciare le k rette una alla volta. All'inizio il piano è 1 sola regione. La prima retta ne aggiunge un'altra. La seconda retta ne aggiunge altre 2, formando 4 regioni. Via via che tracciamo una nuova retta, essa crea una nuova regione dentro ciascuna delle regioni in cui passa, che sono una in più delle rette già tracciate (infatti due regioni sono separate da una delle rette tracciate