SOLUZIONI COMMENTATE DEGLI ESERCIZI DI GEOMETRIA DELLE PROVE DI FEBBRAIO DELLE OLIMPIADI DELLA MATEMATICA NEGLI ANNI 2004 - 2008

Pretara Lorenzo

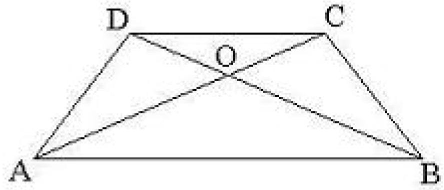
(tirocinante per la laurea triennale in Matematica presso l'Universitá di Bologna, a.a. 2007/2008)

Di seguito esponiamo le risoluzioni dei problemi di geometria proposti nelle gare di febbraio delle Olimpiadi italiane di matematica. Le soluzioni prendono spunto da quelle fornite insieme ai testi delle prove, nel sito ufficiale delle Olimpiadi (http://olimpiadi.ing.unipi.it), ma si cerca di approfondirle descrivendo in modo molto dettagliato ogni singolo passaggio. S'intende in questo modo mostrare la tipologia di problemi fin qui proposti in queste gare, esponendo nel contempo una rassegna degli strumenti da utilizzare per la loro risoluzione.
Cominciamo dall'ultima prova, quella dell'11 febbraio 2008.
Sono presenti 5 esercizi di geometria, di cui 3 a risposta multipla, uno a risposta aperta e una dimostrazione.

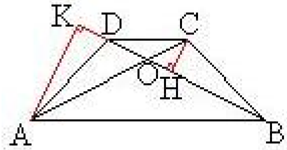
Il primo esercizio é il numero 3, che richiede:

"In un trapezio isoscele $ABCD$ di base maggiore AB, le diagonali vengono divise dal loro punto di incontro O in parti proporzionali ai numeri 1 e 3. Sapendo che l'area del triangolo BOC é 15, quanto misura l'area dell'intero trapezio?".

La prima cosa da fare negli esercizi di geometria é il disegno, che chiarisce molto il testo e il contesto nel quale ci troviamo. Il trapezio é il seguente:

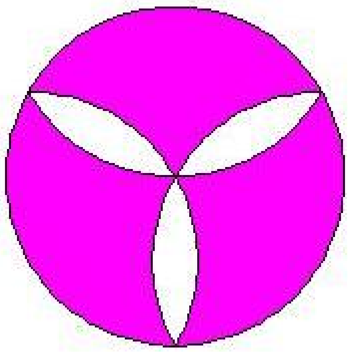


Dal disegno, capiamo che possiamo calcolare l'area dell'intero trapezio come somma delle aree dei 4 triangoli formati dalle diagonali. L'area del triangolo BOC é data per ipotesi, il triangolo AOD é uguale al triangolo BOC (le due figure hanno tre lati uguali). L'area di DOC si calcola $\frac{(b \cdot h)}{2}$: se consideriamo il lato DO come base, allora l'altezza é la stessa del triangolo COB e, conoscendo l'area (15) e la base (3), si ha $h = \frac{15 \cdot 2}{3} = 10$, da cui area di $DOC = \frac{1 \cdot 10}{2} = 5$. La stessa cosa puó essere fatta per calcolare l'area di AOB: calcoliamo l'altezza AK, che é altezza anche del triangolo ADO, di cui conosciamo la base OD (1) e l'area (15); da qui viene che l'altezza AK é 30. L'area di AOB é, quindi, $\frac{OB \cdot AK}{2} = \frac{3 \cdot 30}{2} = 45$. L'area del trapezio é, in conclusione, $15 + 15 + 5 + 45 = 80$.

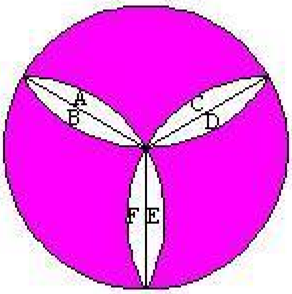


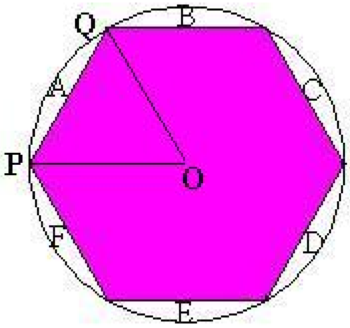
In questo esercizio, si richiede semplicemente la conoscenza della geometria elementare: si tratta, infatti, di calcolare l'area di due triangoli. La complicazione sta nel fatto di riconoscere le altezze (in rosso nella figura) dei due triangoli dei quali bisogna calcolare l'area: sono due triangoli ottusangoli e quindi l'altezza cade all'esterno del triangolo stesso.

Il secondo esercizio di geometria presente nella prova del 2008 é il numero 8 che dice:
"All'interno di un cerchio di raggio 1 si tracciano 3 archi di circonferenza, anch'essi di raggio 1, centrando nei vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Quanto vale l'area della zona ombreggiata?".
É data anche la figura



La soluzione consigliata é quella di riuscire a scomporre e a ricomporre la figura in modo da avere un esagono inscritto in una circonferenza, come segue:

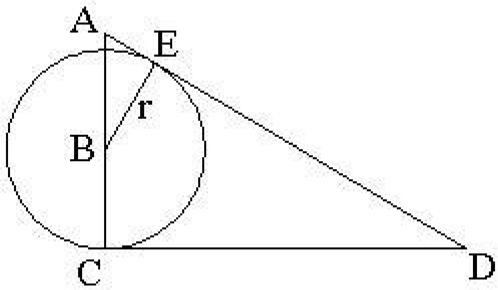




A questo punto basta calcolare soltanto l'area del triangolo POQ, che é data da $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, e moltiplicarla per 6.

L'ultimo esercizio a risposta multipla del 2008 é il numero 12, che richiede: *"In un giorno di sole una sfera é posata su un terreno orizzontale. In un certo istante l'ombra della sfera raggiunge la distanza di 10 metri dal punto in cui la sfera tocca il terreno. Nello stesso istante un'asta di lunghezza 1 metro posta verticalmente al terreno getta un'ombra lunga 2 metri. Qual é il raggio della sfera in metri?"*

Anche qui un disegno chiarisce molto la situazione

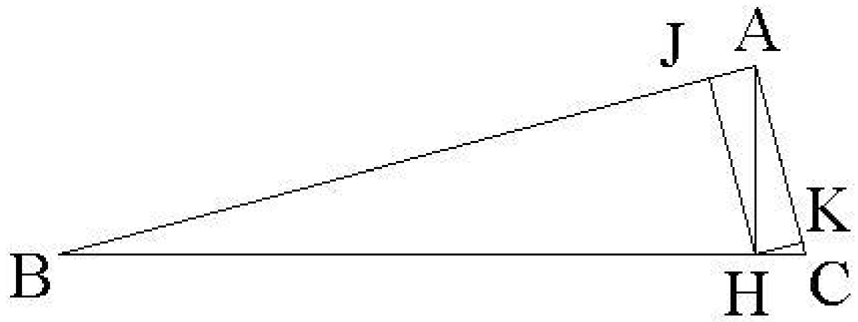


Dal fatto che l'asta genera un'ombra lunga il doppio della sua lunghezza, riusciamo a stabilire che $CD = 2AC$, da cui $AC = 5$. Si puó notare che i due triangoli visibili in figura, AEB e ACD, sono entrambi rettangoli, risp. in E e in C, perché formati da lati che sono tangenti alla sfera e che, quindi, formano con il raggio un angolo retto. Inoltre i due triangoli hanno un angolo in comune, $B\widehat{A}E$, e, quindi, per il primo criterio di similitudine dei triangoli, AEB é simile ad ACD e, dunque, $BE : CD = AB : AD$. BE é il raggio che dobbiamo trovare, CD e AB li conosciamo e, con il teorema di Pitagora, possiamo trovarci AD. Risolvendo la proposizione nel raggio, si trova la soluzione. In questo esercizio si richiedono nozioni sulle tangenti alle circonferenze, i criteri di similitudine dei triangoli e il teorema di Pitagora.

Ora vediamo quali conoscenze si devono avere per risolvere il problema a risposta aperta, che é il numero 14 e che recita:

"Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $A\widehat{B}C = 15°$. Sia H il piede dell'altezza da A e siano J, K le proiezioni di H su AB e su AC. Sapendo che l'area di $AJHK$ é 45 cm^2, quanti cm^2 vale il prodotto $BJ \cdot CK$?".

Al solito si comincia con il disegno:



Si vede che BJ e CK sono proiezioni dei cateti sull'ipotenusa ed é, quindi, logico pensare di applicare il secondo teorema di Euclide ai triangoli AHB e CHA. Si ha:

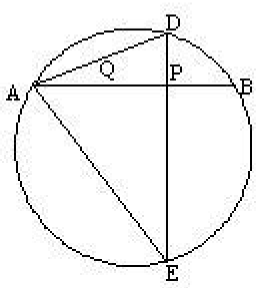
$$AJ \cdot JB = JH \cdot JH$$
$$AK \cdot KC = HK \cdot HK$$

Ricavando BJ e CK e moltiplicando le espressioni ottenute, si ha:

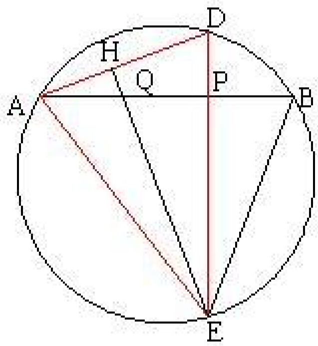
$$JB \cdot KC = \frac{JH \cdot JH \cdot HK \cdot HK}{AJ \cdot AK}$$

Dalle ipotesi si ha che l'area del rettangolo $AJHK$ é 45 e quindi $AJ \cdot AK = 45$ e $JH \cdot HK = 45$, da cui segue $JB \cdot KC = 45$, che é la soluzione. In questo esercizio si richiede soltanto l'utilizzo del secondo teorema di Euclide: l'altezza relativa all'ipotenusa é media proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa stessa.

L'ultimo esercizio di geometria della gara di febbraio 2008 é quello dimostrativo, il numero 16:
"Sia AB una corda di una circonferenza e P un punto interno ad AB tale che $AP = 2PB$. Sia DE la corda passante per P e perpendicolare ad AB. Dimostrare che il punto medio Q di AP é l'ortocentro di ADE".
Il disegno é



L'ortocentro é il punto d'incontro delle altezze e per determinarlo bastano due altezze: AP é altezza, perché perpendicolare a DE, e passa per Q. Tracciamo ora il segmento EQ e lo prolunghiamo fino ad incontrare AD nel punto H. Si deve dimostrare che l'angolo $A\widehat{H}E$ é retto. Tracciamo, inoltre, il segmento EB.



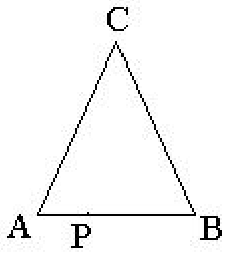
Sappiamo che $Q\widehat{P}E$ é retto e che $A\widehat{Q}H = E\widehat{Q}P$ perché angoli opposti al vertice, se dimostriamo che gli angoli $H\widehat{A}Q$ e $Q\widehat{E}P$ sono uguali, allora i triangoli AHQ e EPQ sono simili e l'angolo $A\widehat{H}E$ é uguale a $Q\widehat{P}E$ e, quindi, retto. Ora $QP = PB$ per ipotesi, inoltre EP é altezza e mediana del triangolo QPE, che, quindi, é isoscele. Di conseguenza EP é anche mediana, quindi $Q\widehat{E}P = P\widehat{E}B$. Ma l'angolo $P\widehat{E}B = D\widehat{E}B$ insiste sullo stesso arco dell'angolo $D\widehat{A}B$, e quindi i due angoli sono uguali. Quindi $Q\widehat{E}P = P\widehat{E}B = D\widehat{E}P = D\widehat{A}B = H\widehat{A}Q$. Nella dimostrazione si é fatto riferimento ad alcuni criteri di congruenza tra angoli (angoli opposti al vertice, angoli alla base di un triangolo isoscele, angoli alla circonferenza), alla caratterizzazione dei triangoli isosceli tramite altezze, mediane e bisettrici e ai criteri di similitudine dei triangoli.

Come si nota dagli svolgimenti degli esercizi, ognuno di essi é riconducibile a problemi riguardanti triangoli, di cui si utilizzano le piú importanti proprietá e i teoremi piú famosi, come quelli di Pitagora e Euclide. Grande importanza hanno, inoltre, i criteri di congruenza degli angoli per stabilire eventuali similitudini o uguaglianze dei triangoli. Sono presenti anche alcune proprietá della circonferenza: nell'ottavo esercizio bisogna riconoscere la scomposizione della figura, nel dodicesimo, si tracciano tangenti alla circonferenza e nel sedicesimo ci sono angoli alla circonferenza.

Vediamo ora la prova del 21 febbraio 2007.

Il primo esercizio di geometria é il numero 1:

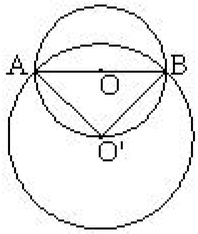
"In un triangolo isoscele ABC con $AC = BC \neq AB$, si fissi un punto P sulla base AB. Quante posizioni puó assumere nel piano un punto Q se vogliamo che i punti A, P e Q, presi in ordine qualsiasi, siano i vertici di un triangolo simile ad ABC?".



Il triangolo APQ, per essere simile ad ABC, deve essere, ovviamente, isoscele, e, quindi, devono essere uguali due lati, cioé: $AQ = QP$, $AQ = AP$ o $AP = QP$. Inoltre, per tutti e tre i casi, il punto Q puó essere preso sia sopra sia sotto il lato AP, e, quindi, esistono 6 possibili posizioni del punto Q. Per risolverlo é necessario conoscere soltanto le definizioni di triangolo isoscele e triangoli simili.

Il secondo esercizio di geometria é il numero 8:

"Priscilla é stata incaricata di preparare la scenografia per la recita della sua scuola. Ha bisogno di una falce di luna, e ha a disposizione un cerchio di cartone di raggio r in cui ritagliarla; allora punta il compasso sul bordo del cerchio, disegna un arco di circonferenza di raggio $r\sqrt{2}$ e taglia lungo la linea tracciata. Quanto vale l'area della falce di luna che ottiene?"



L'area della falce, A' si puó calcolare togliendo l'area delimitata dal cerchio O' e dalla corda AB al semicerchio O. L'area A' é uguale all'area del settore circolare $AO'B$ meno l'area del triangolo $AO'B$. Il triangolo $AO'B$ é rettangolo isoscele: basta vedere, infatti, che é inscritto in un semicerchio e che i due lati AO' e BO' sono i raggi della circonferenza O'. Quindi l'area del triangolo $AO'B$ é $\frac{r\sqrt{2}\cdot r\sqrt{2}}{2}$, cioé r^2. L'area del settore circolare é un quarto dell'area del cerchio, cioé $\frac{1\cdot 2\cdot r^2\cdot\pi}{4}$, cioé $\frac{\pi r^2}{2}$. Quindi la soluzione é $\frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} + r^2$, cioé r^2. In questo esercizio si richiede la conoscenza di alcune proprietá del cerchio, quali l'area, l'area del settore circolare e triangoli inscritti in un semicerchio.

Il terzo esercizio é il numero 10:
"Un triangolo equilatero ha lo stesso perimetro di un rettangolo di dimensioni b ed h (con $b > h$). L'area del triangolo é $\sqrt{3}$ volte l'area del rettangolo. Quanto vale $\frac{b}{h}$?".
Si risolve impostando un sistema, in cui si pongono uguali l'area e il perimetro delle due figure:

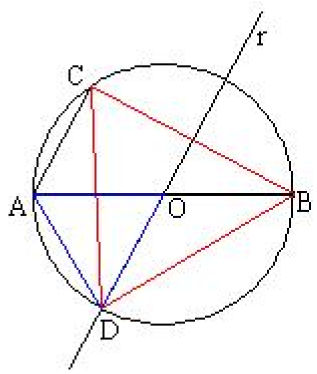
$$\begin{cases} 3L = 2(b+h) \\ \frac{\sqrt{3}\cdot L^2}{4} = \sqrt{3}b\cdot h \Leftrightarrow \frac{L^2}{4} = b\cdot h \end{cases}$$

In questo sistema, sono noti la somma $b+h$ e il prodotto $b\cdot h$, per cui si puó impostare l'equazione $t^2 - \frac{3}{2}L\cdot t + \frac{L^2}{4} = 0$ dove la t é una tra b e h e si é usato il fatto che $(t-b)\cdot(t-h) = t^2 - (b+h)\cdot t + b\cdot h$. Risolvendo l'equazione si trovano b e h e, dunque, la soluzione. La particolaritá dell'esercizio sta nell'impostare l'equazione risolutiva.

L'ultimo esercizio geometrico é quello dimostrativo, il 18:

"E' data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto sulla circonferenza (diverso da A e da B), e si tracci la retta r parallela ad AC per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB. i) Dimostrare che DO é bisettrice di $C\widehat{D}B$. ii) Dimostrare che il triangolo CDB é simile al triangolo AOD."

Facciamo il disegno



i)Si deve dimostrare che $C\widehat{D}O = O\widehat{D}B$. $C\widehat{D}O = A\widehat{C}D$, perché angoli alterni interni di due rette (AC e r) parallele tagliate da una trasversale (CD); $A\widehat{C}D = A\widehat{B}D$, perché insistono sullo stesso arco di circonferenza; $A\widehat{B}D = O\widehat{D}B$, perché angoli alla base di un triangolo isoscele (OD e OB sono raggi). Dunque, $C\widehat{D}O = O\widehat{D}B$. ii)$D\widehat{C}B = D\widehat{A}B$, perché insistono sullo stesso arco di circonferenza; $A\widehat{O}D = 2A\widehat{B}D$, perché angoli al centro e alla circonferenza, ma $2A\widehat{B}D = 2O\widehat{B}D = C\widehat{D}B$, da cui $A\widehat{O}D = C\widehat{D}B$; quindi i due triangoli hanno angoli uguali e, per il primo criterio di similitudine, sono simili. Nella dimostrazione si utilizzano unicamente triangoli simili e uguaglianze tra angoli.

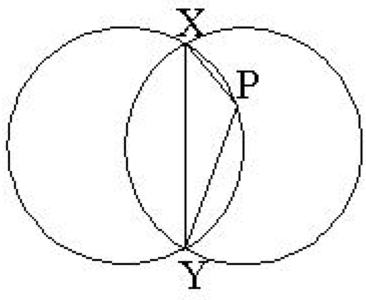
In sintesi, anche nel 2007 sono presenti in tutti gli esercizi di geometria i triangoli, isoscele, rettangolo, triangoli simili e criteri di similitudine; sono presenti, inoltre, esercizi sul cerchio, area del cerchio e del settore circolare, angoli al centro e alla circonferenza, e caratterizzazione degli angoli formati da due rette tagliate da una trasversale.

Vediamo ora la prova del 16 febbraio 2006.

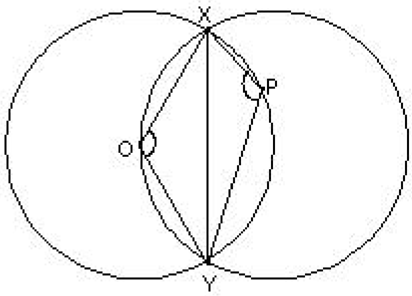
Il primo esercizio da risolvere con competenze geometriche é il numero 7:

"Due circonferenze con lo stesso raggio si intersecano in X e Y . Sia P un punto su un arco XY di una circonferenza interno all'altra. Sapendo che il segmento XY é lungo 3 e che l'angolo $X\widehat{P}Y$ misura $120°$*, qual é l'area dell'intersezione tra i due cerchi?".*

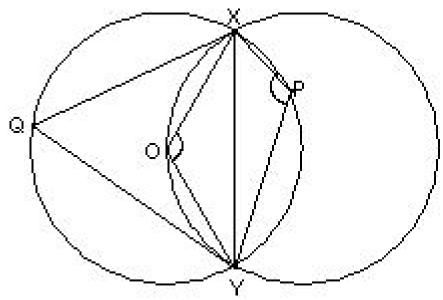
Il disegno é il seguente



L'area dell'intersezione dei due cerchi é simmetrica rispetto al segmento XY, quindi basta calcolare l'area di uno solo dei due segmenti circolari che la compongono e moltiplicarla per 2. Sappiamo che l'angolo $X\widehat{P}Y$ é di $120°$. Prendiamo il punto medio O dell'arco XY non contenente P. Il triangolo XOY é isoscele, con l'angolo in O di $120°$ (per la simmetria della figura e le proprietá degli angoli alla circonferenza).



Se invece prendiamo un punto Q sulla prima circonferenza nell'arco XY non contenente P, otteniamo il quadrilatero $QXPY$, che é inscritto in una circonferenza.



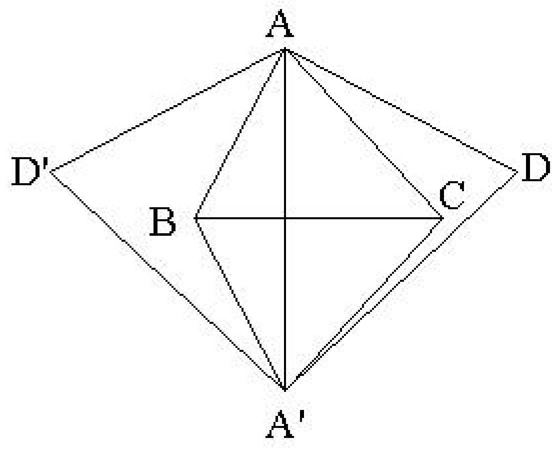
La somma degli angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza é 180°, quindi l'angolo $X\widehat{Q}Y$, che é un angolo alla circonferenza, misura 60°, quindi é la metá dell'angolo $X\widehat{O}Y$. Ma allora l'angolo $X\widehat{O}Y$ é un angolo al centro e, quindi, O é il centro della circonferenza contenente P (questo vale sempre se l'angolo in P é 120°). Quindi possiamo calcolare l'area del segmento circolare XPY come differenza tra l'area del settore circolare OXY e l'area del triangolo XOY. L'area del settore circolare si calcola semplicemente con la proporzione $Area : \pi r^2 = X\widehat{O}P : 2\pi$. Il raggio della circonferenza é l'ipotenusa del triangolo rettangolo ottenuta tracciando l'altezza del triangolo isoscele XOY, quindi, applicando le formule trigonometriche, $r = \frac{XY}{2cos30°} = \sqrt{3}$. Quindi, l'area del settore circolare é $\frac{120°}{360°} \cdot 3\pi = \pi$.

A questa dobbiamo togliere l'area del triangolo isoscele XOY: l'altezza é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi l'area é $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Quindi l'area del segmento circolare é $2(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4})$. Questo esercizio richiede qualche nozione in piú rispetto agli altri, ma nulla che non riguardi triangoli o circonferenze: infatti, si é fatto riferimento ad angoli al centro e alla circonferenza, quadrilateri inscritti in una circonferenza, area di settori circolari e regole sui triangoli rettangoli con angoli acuti di 30° e 60°.

Il secondo esercizio é il numero 8:

"Sia ABC un triangolo e sia A' il simmetrico di A rispetto a BC; sia poi DAA' simile ad ABC e sia D' il simmetrico di D rispetto a AA'. Sapendo che il prodotto delle aree dei quadrilateri $ABA'C$ e $ADA'D'$ é 16, si puó dire che AA'... (Nota: la similitudine tra DAA' e ABC va intesa in modo ordinato: $DA : AB = AA' : BC = A'D : CA$)".

Ora facciamo il disegno: visto che si richiede di considerare il simmetrico del punto A rispetto a BC, conviene impostare il disegno con il lato BC a fare da base.

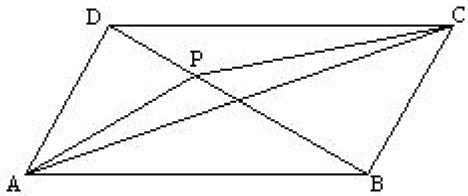


Il testo richiede la lunghezza di AA'. Sappiamo che il prodotto delle aree dei due quadrilateri é 16: cerchiamo di scriverlo esplicitamente. Il quadrilatero $ABA'C$ é formato da due triangoli uguali, per cui l'area é due volte l'area del triangolo ABC. Se chiamiamo H il piede dell'altezza su BC, l'area é $\frac{BC \cdot AH}{2}$ ma, per costruzione, $AH = \frac{AA'}{2}$, quindi l'area del triangolo diventa $\frac{BC \cdot AA'}{4}$ e quella del quadrilatero é $\frac{BC \cdot AA'}{2}$. Il quadrilatero $ADA'D'$ é formato anch'esso da due triangoli uguali, quindi basta calcolare l'area di $AA'D$: se chiamiamo K il piede dell'altezza su AA', l'area di $AA'D$ é $\frac{AA' \cdot DK}{2}$ e, di conseguenza, l'area del quadrilatero é $AA' \cdot DK$. Quindi abbiamo l'equazione $\frac{BC \cdot AA' \cdot AA' \cdot DK}{2} = 16$. Ora bisogna sfruttare la seconda ipotesi dell'esercizio, la similitudine tra i triangoli ABC e $AA'D$: se i triangoli sono simili, anche le altezze sono in proporzione con i lati, quindi $AA' : BC = DK : AH$, da cui si ottiene, sostituendo ad AH $\frac{AA'}{2}$, $AA' : BC = 2DK : AA'$, da cui (il prodotto dei medi é uguale a quello degli estremi) $AA' \cdot AA' = 2BC \cdot DK$. Quindi $BC \cdot DK = \frac{AA' \cdot AA'}{2}$ e, sostituendo all'equazione trovata prima, $\frac{AA' \cdot AA' \cdot AA' \cdot AA'}{4} = 16$, cioé $AA'^4 = 4 \cdot 16$, da cui $AA' = 2\sqrt{2}$. L'esercizio, pur se non risolvibile in modo diretto, utilizza semplicemente le proporzioni tra i triangoli simili; la particolaritá sta nello scrivere l'area dei quadrilateri e nello sfruttare la similitudine scrivendo le proporzioni giuste.

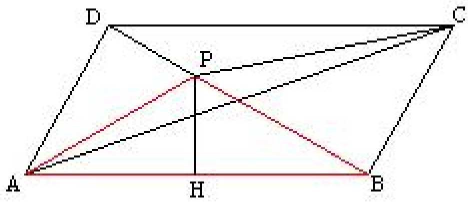
L'esercizio successivo é il numero 13 ed é a risposta aperta:

"Sia $ABCD$ un parallelogramma. Si sa che il lato AB misura 6, l'angolo $B\widehat{A}D$ misura $60°$ e l'angolo $A\widehat{D}B$ é retto. Sia P il baricentro del triangolo ACD. Calcolare il valore del prodotto delle aree del triangolo ABP e del quadrilatero $ACPD$".

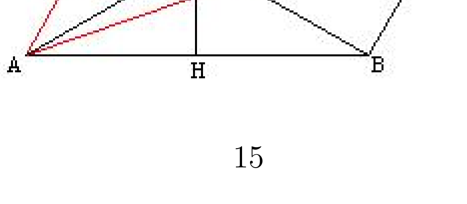
Facciamo il disegno



Calcoliamo prima l'area del triangolo ABP: la base misura 6, dobbiamo trovare l'altezza PH, se chiamiamo H il piede.



Il triangolo PHB é retto ed ha l'angolo $A\hat{B}P$ in comune con il triangolo ADB, quindi i due triangoli sono simili, in particolare $PH : AD = BP : AB$. AD misura 3, perché cateto minore di un triangolo rettangolo con gli angoli di 30° e 60°, di conseguenza, $BD = 3 \cdot \sqrt{3}$. Ora, il baricentro taglia le mediane in due parti, di cui una é doppia dell'altra, per questo, DP é $\frac{2}{3}$ della mezza diagonale, cioé $\frac{1}{3}$ della diagonale BD, quindi $BP = \frac{2}{3} \cdot BD = 2 \cdot \sqrt{3}$. Dalla proporzione si ha $PH \cdot AB = AD \cdot BP = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$, quindi l'area é la metá, cioé $3\sqrt{3}$. Calcoliamo ora l'area del quadrilatero $ACPD$. Si puó procedere calcolando l'area del triangolo DPC e sottrarla a quella del triangolo ADC. L'altezza di ADC é l'altezza del parallelogramma, che si puó ottenere prolungando il segmento PH fino al punto Q.



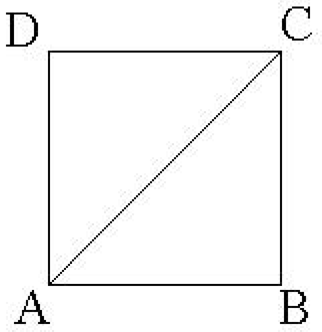
Quindi $area(APCD) = area(ADC) - area(APC) = \frac{QH \cdot DC}{2} - \frac{QP \cdot DC}{2} = \frac{(QH-QP) \cdot DC}{2} = \frac{PH \cdot DC}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Il risultato é, dunque, $3 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 27$.

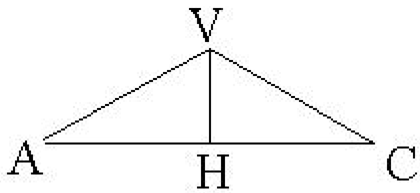
In questo esercizio si fa ricorso di nuovo a triangoli, in particolare alle similitudini e ai triangoli rettangoli di 30° e 60°; inoltre, si utilizzano propriétá delle mediane e dei baricentri e delle diagonali dei parallelogrammi.

Il prossimo esercizio é il numero 14:

"Una piramide a base quadrata ha il lato di base lungo $\sqrt{3}$ e tutti gli spigoli delle facce laterali sono lunghi $\sqrt{2}$. Quanti gradi misura l'angolo fra due spigoli non appartenenti alla stessa faccia laterale?".

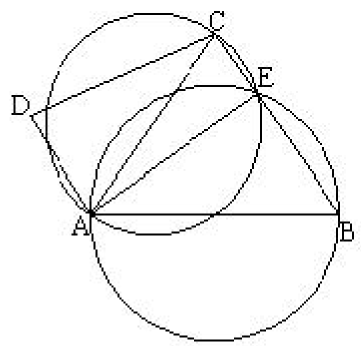
In questo caso il disegno della piramide non aiuta molto, ma possono essere utili i disegni di certe sezioni piane della figura.



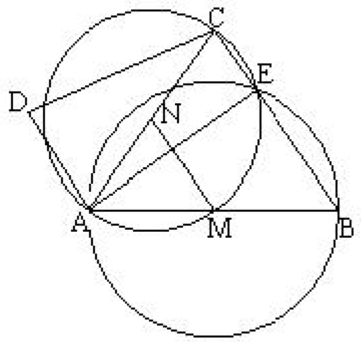


Il quadrato $ABCD$ é la base della piramide e il triangolo AVC é il triangolo formato dalla diagonale AC del quadrato e due spigoli opposti della piramide. Si deve calcolare l'ampiezza dell'angolo al vertice tra due spigoli opposti, cioé l'angolo $A\widehat{V}C$. Sappiamo che la base del quadrato misura $\sqrt{3}$, quindi la diagonale AC del quadrato é lunga $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$ e il segmento AH, metá di AC, misura $\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Del triangolo rettangolo AHV conosciamo, dunque, il cateto AH e l'ipotenusa AV. Per le formule trigonometriche, il rapporto tra cateto e ipotenusa é il seno dell'angolo opposto al cateto, cioé l'angolo $A\widehat{V}H$, che é la metá di $A\widehat{V}C$, che é quello che dobbiamo trovare. Quindi il seno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, il che vuol dire che l'angolo $A\widehat{V}H$ é 60° e l'angolo $A\widehat{V}C$ é 120°. Questo esercizio, come si nota, si risolve semplicemente con le formule trigonometriche.

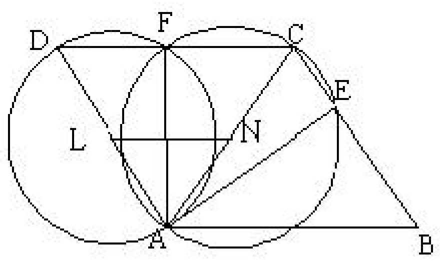
L'ultimo esercizio é la dimostrazione, il numero 17:
"Sia $ABCD$ un quadrilatero; chiamiamo E l'intersezione (distinta da A) tra le circonferenze di diametri AB e AC ed F l'intersezione (sempre distinta da A) tra le circonferenze di diametri AC e AD. Dimostrare che: a) se $E\widehat{A}D = 90°$ allora BC é parallelo a AD; b) se $E\widehat{A}D = F\widehat{A}B = 90°$ allora $ABCD$ é un parallelogramma; c) se $ABCD$ é un parallelogramma allora $E\widehat{A}D = F\widehat{A}B = 90°$".
Iniziamo con il punto a). In questo caso il disegno é di fondamentale importanza; cerchiamo di rappresentare solamente ció che serve per il primo punto e di fare un disegno il piú generale possibile e proporzionato.



Il punto a) ci dice che l'angolo $E\widehat{A}D$ é retto. Dobbiamo dimostrare che BC é parallelo a AD. L'intuizione sta nel tracciare il segmento che unisce i due centri della circonferenza (nella figura successiva é il segmento MN).



Il segmento MN é parallelo a BC per il teorema di Talete: un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali divide una trasversale in segmenti che sono proporzionali ai segmenti generati dall'altra trasversale. Ora, MN divide AC e AB in segmenti uguali, quindi MN é parallelo a BC. Inoltre, MN taglia anche AE in segmenti uguali ($AN = NE$) e AE é perpendicolare a MN, perché é corda comune e MN passa per i centri delle circonferenze. Ma anche AD é perpendicolare a AE per ipotesi (l'angolo $E\widehat{A}D$ é retto). Quindi AD e MN sono perpendicolari allo stesso segmento e, quindi, paralleli. Ma MN é parallelo sia a AD che a BC, quindi i due lati sono paralleli. Dimostriamo ora il punto b) e facciamo il nuovo disegno.



Dire che $ABCD$ é un parallelogramma vuol dire che i lati opposti sono paralleli. Per il punto a), sappiamo giá che se $E\widehat{A}D = 90°$ allora AD é parallelo a BC. Dobbiamo dimostrare che se anche $F\widehat{A}B = 90°$ allora AB é parallelo a CD. Vista la somiglianza con il punto a), si puó procedere analogamente.

Tracciamo, come per il punto a), il segmento LN, che congiunge i due centri delle due circonferenze. Come prima, FA é perpendicolare a LN, AB é perpendicolare a FA (l'angolo $F\widehat{A}B$ é retto per ipotesi) e, di conseguenza, LN é parallelo ad AB. Sempre come nel primo punto, i segmenti AC e AD sono divisi a metá e, quindi, le sue parti sono proporzionali. Dunque, per il teorema di Talete, LN é parallelo a CD e, come si voleva, anche AB é parallelo a CD.

Vediamo, infine, il punto c), che altro non é se non la condizione opposta del punto b), cioé sappiamo che i lati opposti sono paralleli e dobbiamo dimostrare che gli angoli $E\widehat{A}D$ e $F\widehat{A}B$ sono retti. Da a) e b) sappiamo che DC e AB, paralleli tra loro, sono anche paralleli a LN; ma LN é perpendicolare a FA, quindi, anche AB é perpendicolare a FA e $F\widehat{A}B$ é retto. Analogamente, AD e BC sono paralleli a MN, ma MN é perpendicolare ad AE, quindi, anche AD é perpendicolare ad AE e $E\widehat{A}D$ é retto. La dimostrazione, anche se lunga, nei punti b) e c) usa nozioni e risultati del primo punto. In quest'ultimo, si usa il teorema di Talete, enunciato sopra, alcune proprietá delle corde, di parallelismo e perpendicolaritá.

Riassumendo, ogni esercizio si risolve con proprietá di triangoli o circonferenze; in particolare, si utilizzano formule trigonometriche, triangoli rettangoli di 30° e 60°, similitudini tra triangoli, proprietá di mediane e baricentri; angoli al centro e alla circonferenza, quadrilateri inscritti in una circonferenza, settori circolari e corde. Si fa riferimento anche alle diagonali dei parallelogrammi, al teorema di Talete, parallelismo e perpendicolaritá.

Analizziamo, ora, la prova del 17 febbraio 2005.

Il primo esercizio di geometria che si incontra é il numero 2:

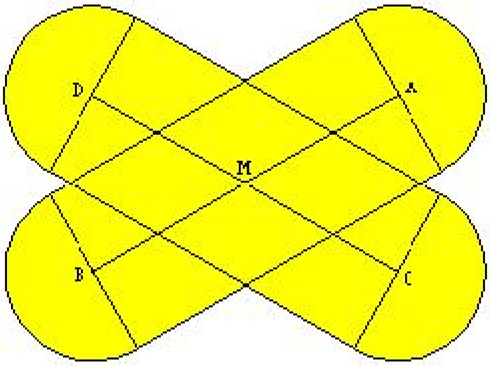
"a, b, c sono tre numeri reali positivi tali che $a + b + c = 1$. Quale delle seguenti affermazioni é equivalnte a imporre che a, b, c siano le misure dei lati di un triangolo non degenere?".

Senza vedere le affermazioni, vediamo come va risolto il problema. Si richiede che a, b, c siano lati di un triangolo non degenere; questo equivale a dire che ogni lato deve essere minore della somma degli altri due. Quindi, $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Consideriamo la prima e sommiamo entrambi i membri per a, in modo da poter utilizzare l'ipotesi. Si ha: $a + a < a + b + c = 1$, cioé $2a < 1$, $a < \frac{1}{2}$. Per simmetria, si ha che $b < \frac{1}{2}$ e $c < \frac{1}{2}$. In questo esercizio si utilizza soltanto la disuguaglianza triangolare, chiamata cosí appunto perché é condizione necessaria e sufficiente affinché tre numeri possano essere i lati di un triangolo.

L'esercizio successivo é il numero 5:

"AB e CD sono due segmenti, entrambi lunghi 4, aventi il punto medio M in comune e tali che $B\widehat{M}D = 60°$. Indichiamo con X l'insieme di tutti e soli i punti che distano al piú 1 da almeno uno dei due segmenti. Quanto misura la superficie di X?".

L'esercizio si risolve soltanto dopo aver individuato bene la superficie di cui bisogna calcolare l'area. Per far ció é necessario un disegno.



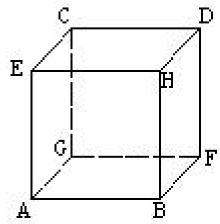
La superficie X é l'area gialla ed é quella perché i punti distanti 1 da un segmento formano un rettangolo, al quale va aggiunto il semicerchio agli estremi del segmento. Per calcolare l'area possiamo calcolare l'area dei due rettangoli con i semicerchi e sottrargli l'area dell'intersezione, cioé l'area del parallelogramma. L'area dei rettangoli é 8, perché un lato é 4, per ipotesi, e l'altro é 2 perché i punti distano al massimo 1 dai segmenti. L'area dei quattro semicerchi é uguale all'area di due cerchi, di raggio 1, cioé 2π. Per calcolare l'area del parallelogramma, ci servono la base e l'altezza: l'altezza é 2, perché é uguale all'altezza del rettangolo; la base é un lato di un triangolo equilatero (i due segmenti formano un angolo di 60°), che ha altezza 2, quindi il lato é $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Quindi, l'area del parallelogramma é $\frac{8}{\sqrt{3}}$ e l'area della superficie X é $8+8+2\cdot\pi-\frac{8}{\sqrt{3}}$, cioé $16+2\cdot\pi\frac{8}{\sqrt{3}}$. Nell'esercizio si utilizzano nozioni base della geometria piana e formule trigonometriche; la particolaritá consiste nel riconoscere e disegnare la superficie.

Il prossimo esercizio é il numero 8:

"Dato un cubo di lato unitario, consideriamo il piano cui appartengono gli spigoli AB e CD e quello cui appartengono gli spigoli AE e FD. Questi due piani tagliano il cubo in quattro parti. Qual é il massimo tra i volumi di tali

parti?".

É data, inoltre, la figura

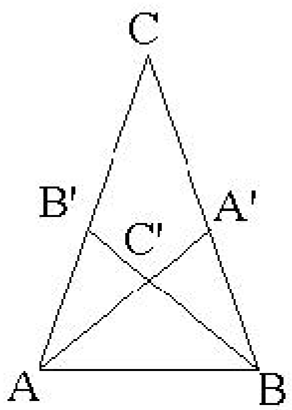


Alla soluzione si puó arrivare per motivi di simmetria: consideriamo, infatti, anche il terzo piano che taglia il cubo, il piano passante per gli spigoli AG e DH. In questo modo il cubo viene diviso in sei parti uguali, che, quindi, hanno tutte volume $\frac{1}{6}$. Se, peró, non consideriamo il terzo piano, ci sono quattro parti e due di queste hanno ancora volume $\frac{1}{6}$, mentre le altre due, siccome sono uguali, devono avere volume $\frac{1}{3}$. Quindi, il volume massimo é $\frac{1}{3}$.

L'esercizio successivo é a risposta aperta ed é il numero 12:

"ABC é un triangolo con $AC = BC$ e $A\widehat{C}B < 60°$. Siano A' e B' due punti sui lati BC e AC rispettivamente tali che $AA' = BB' = AB$. Sia C' l'intersezione di AA' con BB'. Sapendo che $AC' = AB'$ e $BC' = BA'$, quanto vale l'ampiezza in gradi dell'angolo $A\widehat{C}B$?".

Innanzitutto facciamo la figura per capire meglio.



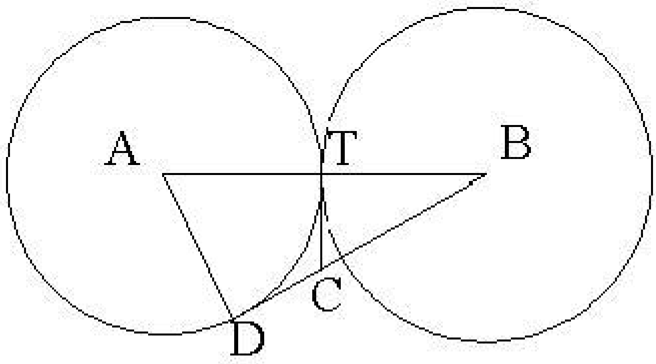
Dobbiamo calcolare l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{C}B$ sapendo solamente alcune uguaglianze, quindi bisogna partire proprio da queste. Sappiamo che $AC = BC$, $AA' = BB' = AB$, $AC' = AB'$, $BC' = BA'$. La prima uguaglianza ci dice che il triangolo ABC é isoscele in C; la seconda che i triangoli BAA' e ABB' sono isosceli; inoltre, hanno gli angoli alla base uguali, perché uguali agli angoli alla base del triangolo ABC, quindi sono simili tra loro e sono simili anche ad ABC. Quindi, $A\widehat{C}B = B\widehat{A}A' = A\widehat{B}B'$. La terza uguaglianza ci dice che il triangolo $AC'B'$ é isoscele con l'angolo $A\widehat{B'}C' = A\widehat{B'}B = C\widehat{A}B$, quindi simile ai triangoli precedenti. La stessa cosa vale per la quarta uguaglianza, che ci dice che $A'BC'$ é isoscele e simile a tutti gli altri triangoli isosceli considerati. Quindi tutti gli angoli al al vertice dei triangoli isosceli sono uguali: $A\widehat{C}B = A\widehat{B}B' = B\widehat{A}A' = B'\widehat{A}C' = A'\widehat{B}C'$. Ma la somma di tutti questi angoli é proprio 180°, perché $A\widehat{B}B' + A'\widehat{B}C' = A\widehat{B}C$ e $B\widehat{A}A' + B'\widehat{A}C' = C\widehat{A}B$. Quindi $A\widehat{C}B = \frac{180°}{5} = 36°$. Per risolvere l'esercizio si é fatto uso solamente delle nozioni su triangoli simili.

Il prossimo esercizio é il numero 14:

"Due circonferenze C^1 e C^2 di centri A e B sono tangenti esternamente in

T. Sia BD un segmento tangente a C^1 in D e sia TC il segmento tangente ad entrambe in T con C appartenente a BD. Se AT é lungo 80 e BT é lungo 90, *qual é la lunghezza di CD?".*

Il disegno viene come segue.

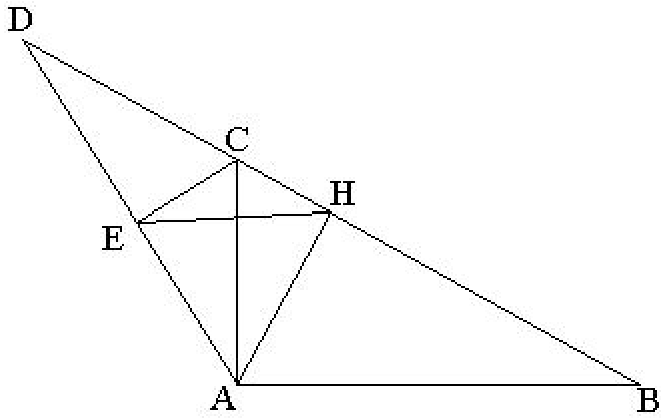


Dobbiamo trovare la lunghezza di CD. I triangoli ADB e CTB sono rettangoli con l'angolo $A\widehat{B}D$ in comune e, quindi, sono simili. Vale, perció, $BC : AB = BD : TB$. AB é 170 per ipotesi; BD é il cateto del triangolo ABD, quindi, applicando il teorema di Pitagora, si ha $BD^2 = AB^2 - AD^2$; AD é uguale ad AT, perché raggi della stessa circonferenza, quindi si trova $BD = 150$. BT é dato dal testo, quindi, dalla proporzione, si trova $BC = 102$. CD si calcola togliendo BC a BD, cioé $150 - 102 = 48$. In questo esercizio, si sono usati il teorema di Pitagora, triangoli simili e proprietá delle tangenti alle circonferenze.

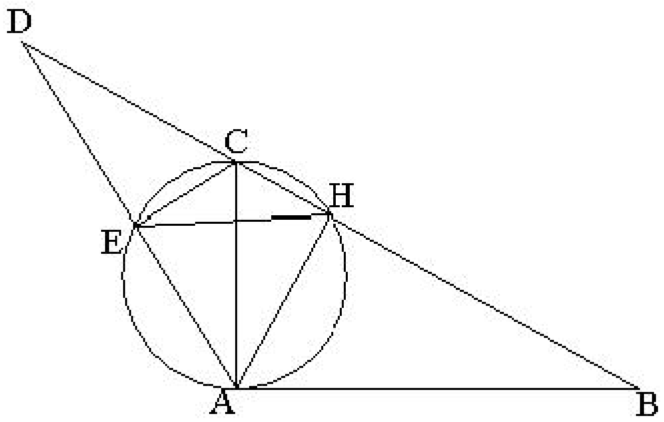
L'ultimo esercizio per il 2005 é la dimostrazione, il numero 16:

"Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB > AC$; sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sulla retta BC si prenda D tale che H sia punto medio di BD; sia poi E il piede della perpendicolare condotta da C ad AD. Dimostrare che $EH = AH$".

Facciamo il disegno.



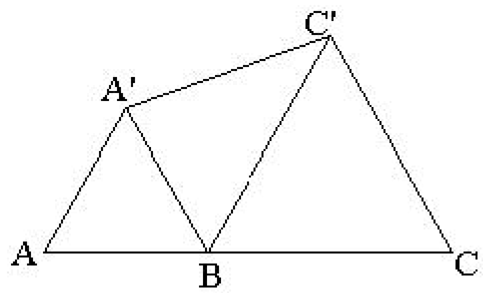
Dal testo sappiamo che HD e HB sono uguali, quindi AH é mediana di BD; ma AH é anche altezza di BD, quindi il triangolo BAD é isoscele. Quindi AH é anche bisettrice e $D\widehat{A}H = B\widehat{A}H$. Ora, gli angoli $C\widehat{E}A$ e $C\widehat{H}A$ sono retti per costruzione, quindi i triangoli rettangoli CHA e CEA possono essere inscritti in una circonferenza di raggio AC.



Gli angoli $D\widehat{A}H$ e $B\widehat{A}H$ sono angoli alla circonferenza che insistono rispettivamente sugli archi EH e AH. L'angolo $B\widehat{A}H$ é l'angolo limite alla circonferenza che insiste sull'arco AH. Ma i due angoli sono uguali, quindi, per la proprietá degli angoli alla circonferenza, i due archi sono uguali e,

di conseguenza, sono uguali anche le corde EH e AH. Questo esercizio sfrutta le proprietá dell'altezza dei triangoli isosceli e la nozione di angoli alla circonferenza. Infatti, gli angoli retti si possono sempre inscrivere in una semicirconferenza (questo perché l'angolo al centro, formato dal diametro, é piatto, quindi l'angolo alla circonferenza é retto).
Negli esercizi del 2005 sono presenti argomenti riguardanti triangoli (disuguaglianza triangolare, formule trigonometriche, triangoli simili, teorema di Pitagora, triangoli isosceli e rettangoli), circonferenze (tangenti ad una circonferenza e angoli alla circonferenza) e nozioni generali di geometria piana.

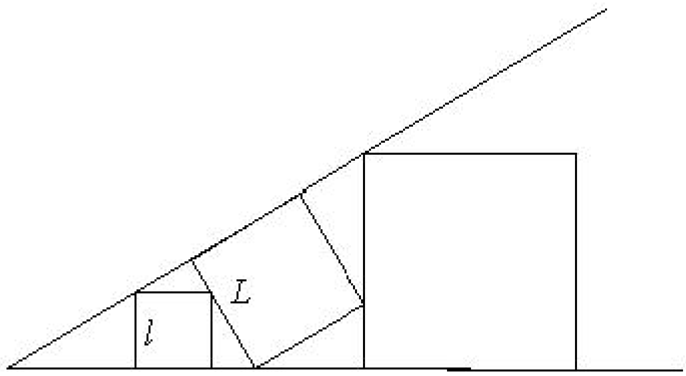
Vediamo la prova del 19 febbraio 2004, che comincia con un esercizio di geometria:
"Sia B un punto interno al segmento AC con AB di lunghezza 2 e BC di lunghezza 3. Costruiti i triangoli equilateri ABA' e CBC', dalla stessa parte rispetto al segmento AC, quanto misura l'area del triangolo $A'BC'$?".
Vediamo il disegno.



Conosciamo due lati del triangolo $A'BC'$ e l'angolo compreso $A'\widehat{B}C'$ che é di $60°$. Possiamo tracciare l'altezza relativa al lato BC' che risulterá essere il cateto del triangolo rettangolo $BA'H$, quindi, per le formule trigonometriche, uguale ad $A'B \cdot sen60° = \sqrt{3}$. Quindi l'area é $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$. Questo esercizio si risolve facendo uso solamente delle formule trigonometriche o delle regole dei triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°.

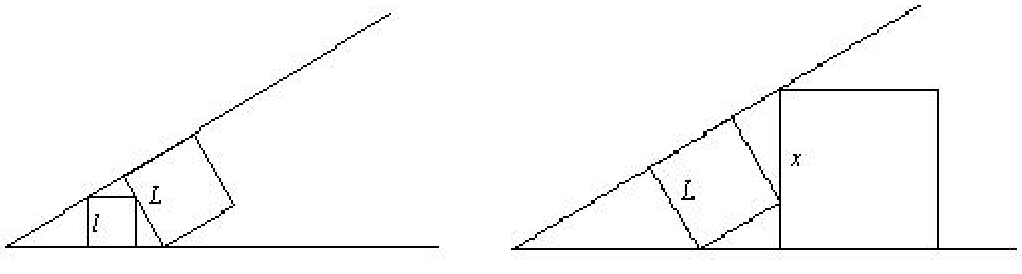
Il secondo esercizio di geometria é il numero 6:

"Tre quadrati sono disposti come in figura.



Se l e L sono i lati dei primi due quadrati da sinistra, quanto vale il lato del quadrato piú grande?".

Per risolvere l'esercizio é fondamentale sfruttare la figura. Disegnamo la figura con soltanto i primi due quadrati, ossia i piú piccoli. La figura é simile a quella che contiene solo il secondo e il terzo quadrato.

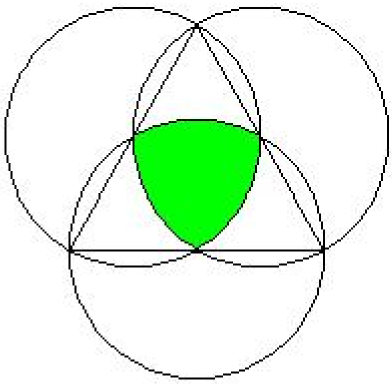


Le due figure sono simili, cioé sono l'una multiplo dell'altra. Quindi, i lati sono proporzionali, cioé vale $L = k \cdot l$ e $x = k \cdot L$, da cui, sostituendo k, $x = \frac{L^2}{l}$. L'esercizio si risolve solamente cercando di capire che i lati sono proporzionali tra loro; il resto sono solo divisioni.

L'esercizio successivo é il 9:

"Calcolare l'area dell'intersezione di tre cerchi aventi come rispettivi diametri i tre lati di un triangolo equilatero unitario".

L'area da trovare é quella colorata.



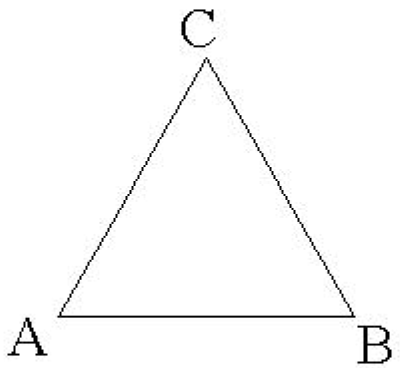
Disegnandola, si trova che i vertici dell'area sono i punti medi dei lati del triangolo. L'area in verde é formata da un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{2}$ e da tre segmenti circolari che sono ognuno un sesto dell'area del cerchio meno l'area dell'esagono regolare inscritto. L'altezza del triangolo equilatero di lato $\frac{1}{2}$ é $\frac{\sqrt{3}}{4}$, per cui l'area é $\frac{\sqrt{3}}{16}$. L'area del cerchio é $\frac{\pi}{4}$ e l'area dell'esagono é sei volte l'area del triangolo di lato $\frac{1}{2}$, cioé $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{8}$, quindi l'area dei tre segmenti circolari é $\frac{3}{6}\cdot(\frac{\pi}{4}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{8})$. L'area della superficie colorata é, quindi, $\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\pi}{8}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{16}$, cioé $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}$ oppure $\frac{\pi-\sqrt{3}}{8}$. In questo esercizio si usano proprietá dei triangoli equilateri e circonferenze e nozioni di geometria piana. Le tecniche sono simili a quelle applicate per il secondo problema del 2008.

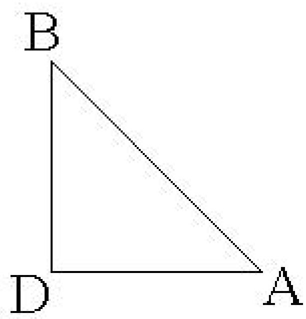
Il prossimo esercizio é il numero 15:

"Un cubetto di sughero di spigolo 10 ha un peso attaccato ad un vertice e

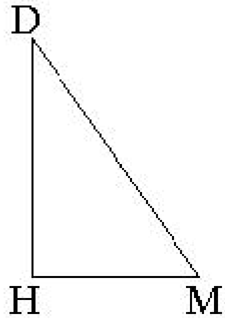
galleggia in un secchio d'acqua in modo che una diagonale del cubetto sia in posizione verticale. Quanto misura, in cm^2, la superficie del cubetto a contatto con l'acqua, sapendo che il volume immerso é pari a 5 volte il volume emerso?".

Per calcolare la superficie richiesta, dobbiamo individuare l'area a contatto con l'acqua: questa é una delle due parti della superficie del cubo tagliata da un piano perpendicolare alla diagonale (la superficie dell'acqua). Tagliando un cubo con tale piano, la parte con volume minore che si forma é una piramide a base triangolare (un triangolo equilatero) che ha per facce laterali triangoli rettangoli isosceli. Calcolando la superficie della parte che emerge e sottraendola alla superficie di tutto il cubo si ottiene la superficie richiesta. La superficie che emerge é l'area delle facce laterali della piramide, cioé tre volte l'area del triangolo rettangolo. Chiamiamo x la parte della diagonale che emerge, cioé l'altezza della piramide, e y il lato del triangolo equilatero che fa da base alla piramide. Disegniamo i triangoli interessati. ABC é la base e ABD é una delle tre facce.





Quindi, y é il lato AB; x, invece, é il segmento che parte dal vertice della piramide, D, e arriva al baricentro di ABC, che chiamiamo H. Nel triangolo seguente M é il punto medio di AB.

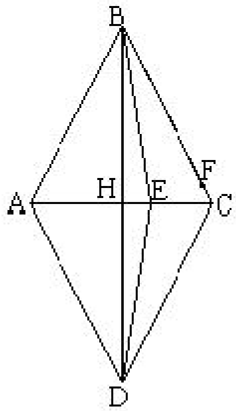


Dunque, DH é x. L'area di ABD é $\frac{AB \cdot DM}{2}$. AB é y, DM é l'ipotenusa di DMH, cioé $DM^2 = DH^2 + HM^2$. Sappiamo che HM é un terzo dell'altezza di ABC (l'altezza é anche mediana e il baricentro divide le mediane in due parti di cui l'una é metá dell'altra), cioé $HM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot y$; che DH é x e che DM é altezza relativa a AB del triangolo ABD, cioé $DM = \frac{y}{2}$. L'uguaglianza di prima diventa, quindi, $\frac{y^2}{4} = x^2 + \frac{y^2}{12}$, cioé $x^2 = \frac{y^2}{6}$, cioé $y = x \cdot \sqrt{6}$. L'area di ABD é, quindi, $\frac{y^2}{4}$, cioé $\frac{3x^2}{2}$. Bisogna, ora, sfruttare l'ipotesi. Il volume della piramide é uguale alla superficie di ABC per l'altezza DH diviso 3: l'area di ABC é $\frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, cioé $\frac{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2}$, e, di conseguenza, l'area della piramide é $\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$, cioé $\frac{\sqrt{3}x^3}{2}$. Quindi $\frac{\sqrt{3}x^3}{2}$ é un sesto del volume del cubo, cioé 1000. Da qui si ricava x^3, $x^3 = \frac{1000 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{1000}{3\sqrt{3}}$, cioé $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Tornando alla superficie di ABD, questa é uguale a $\frac{300}{6} = 50$, quindi l'area della superficie che emerge é 150. La superficie del cubo é 600, da cui segue che l'area della superficie a contatto con l'acqua é $600 - 150 = 450$.
L'esercizio, pur se risolto con un procedimento non immediato, semplifica il problema da uno di geometria solida a uno su triangoli equilateri e rettangoli e loro caratteristiche, come proprietá di altezze o mediane.

L'ultimo esercizio del 2004 é la dimostrazione:
"Sia $ABCD$ un rombo, ed E un punto qualunque sulla sua diagonale AC.

Sia F il punto sul segmento BC tale che $BF = DE$. Provare che $(AB + BF) \cdot FC = AE \cdot EC$".

Facciamo il disegno, rappresentando anche l'altra diagonale e il lato BE.



Ora cerchiamo di riscrivere i segmenti: AB é il lato e lo chiamiamo l; $BF = DE = BE = a$; $FC = BC - BF = l - a$; $AH = HC = b$; $EH = c$; $AE = b + c$; $EC = HC - HE = b - c$. Quindi, la relazione da dimostrare é

$$(l + a)(l - a) = (b + c)(b - c)$$

cioé

$$l^2 - a^2 = b^2 - c^2$$

oppure

$$l^2 - b^2 = a^2 - c^2$$

Ma, per il teorema di Pitagora, la prima espressione é uguale a BH^2 e anche la seconda é uguale a BH^2. Quindi l'espressione é verificata. La dimostrazione non é complicata, in quanto sfrutta solamente il teorema di Pitagora; la particolaritá sta nel cercare di semplificare il piú possibile i dati del problema.

In conclusione, negli esercizi di geometria del 2004 si fa largo uso di circonferenze, ma soprattutto triangoli: formule trigonometriche, similitudini, triangoli equilateri e teorema di Pitagora.